

# Introducción al procesamiento discreto de señales (2a. parte)

Por Miguel Lindig Bos

Sección de Graduados, UPIICSA, IPN, y Departamento de Ingeniería, UAM-Iztapalapa. Apdo. postal 55-534, México 13, D.F.

## RESUMEN

El presente tema de actualización completa la *Introducción al procesamiento discreto de señales*, artículo publicado en el vol. 2, núm. 1 de esta revista. En esta continuación se introducirá al lector en los conceptos fundamentales del análisis espectral como herramienta para el análisis de señales, se describirán los diferentes tipos de analizadores de espectros y los algoritmos matemáticos involucrados. Se mencionarán también algunas aplicaciones del análisis espectral y se discutirán algunos de los problemas prácticos encontrados.

## ABSTRACT

The present tutorial aims to complete an *Introduction to Discrete Signal Processing*. This introduction started with an article published in Vol. 2, No. 1 of this journal. In this article the reader will be introduced to the fundamental concepts of spectral analysis as a tool in signal analysis. We will describe the different types of spectrum analysers as well as the corresponding mathematical algorithms. We will briefly mention some of the applications and practical problems of spectral analysis.

## I. Introducción

En la primera parte de este artículo se hizo una presentación muy somera de los conceptos esenciales en los que está basado el procesamiento discreto de señales. Particularmente, se estableció la relación entre sistemas discretos y continuos con base en el Teorema de Muestreo y se discutieron los elementos que en conjunto constituyen un sistema de procesamiento discreto.

En esta segunda parte se discutirá, a nivel introductorio, el análisis espectral como una herramienta para el análisis de señales, y se describirá su realización con base en sistemas discretos. Finalmente, se mencionarán algunas aplicaciones del análisis espectral en el procesamiento de señales y se discutirán algunos problemas prácticos del procesamiento discreto.

Conviene aclarar aquí lo que entendemos por *espectro de frecuencia*, o simplemente espectro,

de una señal. Toda señal de origen físico —electromagnética, mecánica, térmica, hidráulica, etcétera— puede representarse de manera equivalente por medio de una gráfica en el dominio del tiempo —la variación de amplitud de esta señal como función del tiempo— o por medio de su espectro, que está constituido por una gráfica en el dominio de la frecuencia. En ese sentido, el espectro de una señal constituye otra manera de ver el mismo fenómeno: es una imagen distinta de la misma cosa. Su utilidad radica en el hecho de que muchas propiedades de una señal se visualizan más claramente a través de su espectro que a través de su representación en el tiempo.

## II. La transformada de Fourier

### 1. Definición y algunos ejemplos

La relación explícita entre una señal (función en el dominio del tiempo) y una función específica en el dominio de la frecuencia (espectro) fue establecida, por primera vez, por el físico matemático francés Jean Baptiste Fourier en un trabajo publicado en 1809: *La teoría analítica del calor*. Si ignoramos por el momento señales de amplitud constante, la contribución fundamental de Fourier en este sentido puede expresarse de manera sencilla: toda señal de origen físico es susceptible de representarse como la superposición de un término constante y un número (finito o infinito) de componentes senoidales cuya amplitud y fase son tales que, para cualquier instante de tiempo su suma algebraica equivale al valor de la señal original en ese mismo instante.

Una señal de amplitud constante, dado que no varía con el tiempo, posee un espectro compuesto

tan sólo de esa constante; esto es, una componente de frecuencia cero. En el espectro de una señal que varía con el tiempo, la componente de frecuencia cero corresponde al valor promedio de la señal y, por supuesto, en algunos casos ese valor puede ser cero.

En términos matemáticos, el espectro de una señal está definido por:<sup>1.6</sup>

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

donde  $f(t)$  es la función (señal) original,  $\omega$  es la frecuencia angular (esto es  $\omega = 2\pi f$ ) y  $F(\omega)$  es el espectro, es decir, la representación de la señal en función de la frecuencia.

La ecuación (1) define, también, la llamada transformada de Fourier,  $F\{f(t)\}$ , de la señal original,  $f(t)$ . A partir del espectro  $F(\omega)$ , la señal original  $f(t)$  puede recuperarse por medio de la operación inversa, definida por la relación:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

Esta última expresión define, también, la transformada inversa de Fourier,  $F^{-1}\{F(\omega)\}$ , del espectro,  $F(\omega)$ .

Es posible demostrar que si  $f(t)$  es una señal periódica de duración infinita, su espectro  $F(\omega)$  será discreto; es decir, será diferente de cero tan sólo para un número discreto de valores de la frecuencia  $\omega$ . En caso contrario, ya sea una señal no periódica de duración infinita o una señal de duración limitada (transitoria), este espectro será continuo y estará definido para todas las frecuencias. Estos conceptos se aclaran en la Figura 1, la cual se explica por sí misma.

Es importante aclarar que, en general, el espectro,  $F(\omega)$  de una señal es para cada valor de la frecuencia  $\omega$  un número complejo y estará representado, por lo tanto, por su magnitud,  $|F(\omega)|$  y su ángulo de fase,  $e^{j\phi}$ . Tendremos entonces que:

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\phi} \quad (3)$$

La importancia de la relación de fase que guardan las diferentes componentes senoidales del espectro de una señal se aclara en la Figura 2. Los espectros de las señales representados en las figuras 2a y 2b están constituidos por la misma frecuencia fundamental,  $f_0$ , y su tercera armónica,  $3f_0$ . La diferencia radica en la relación de

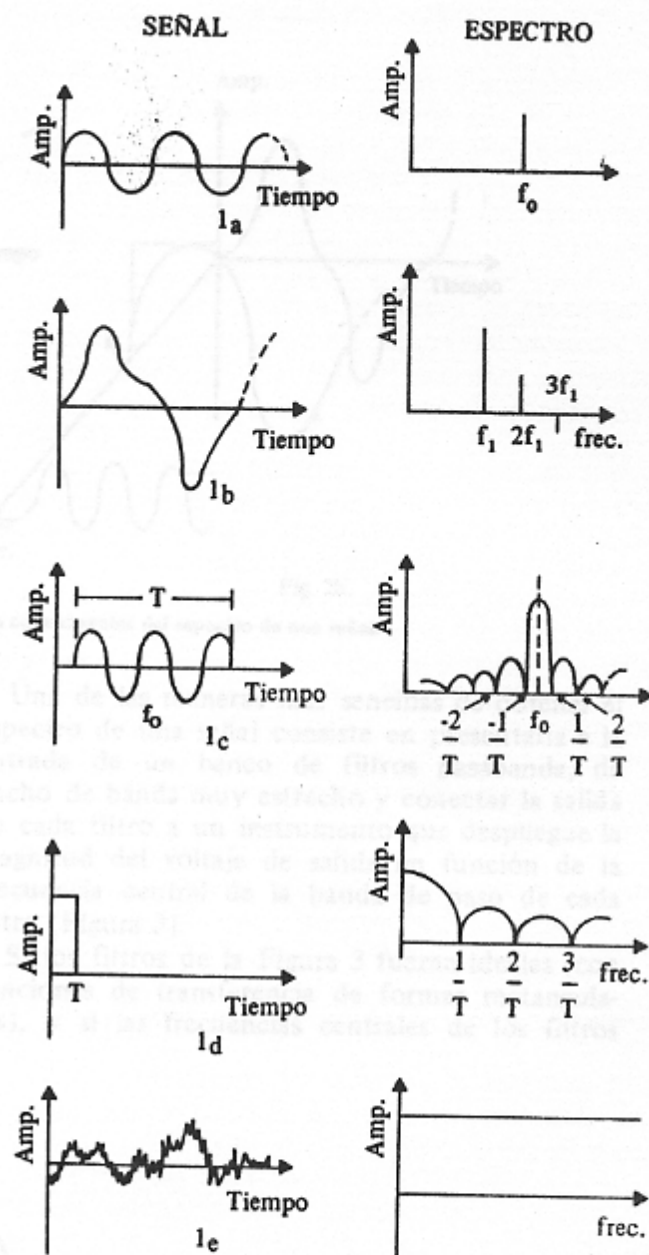


Figura 1. Relación entre diversas señales y sus espectros. 1a) Corresponde al caso más sencillo: el espectro de una señal senoidal pura, de frecuencia  $f_0$  y amplitud  $A$ . 1b) Corresponde a una señal compuesta por 3 senoides de frecuencias  $f_1$  (fundamental),  $2f_1$  (primera armónica) y  $3f_1$  (segunda armónica), con las amplitudes y signos indicados. Las Figuras 1a y 1b muestran señales periódicas (se repiten infinitamente) de período  $1/f_0$  y  $1/f_1$ , respectivamente. Su espectro es, por lo tanto, discreto y existe únicamente para ciertos valores de la frecuencia. La Figura 1c) muestra que una señal transitoria representada por una senoide "cortada", posee un espectro continuo; esto es, contiene componentes a cualquier frecuencia. Lo mismo ocurre con el pulso rectangular de la Figura 1d). En la Figura 1e) se intentó representar una señal aleatoria, específicamente al ruido blanco -blanco, por analogía con la luz- cuyo espectro posee componentes de la misma amplitud a cualquier frecuencia, y por lo tanto es constante.

fase, pues en 2b la armónica está defasada  $180^\circ$  con relación a 2a.

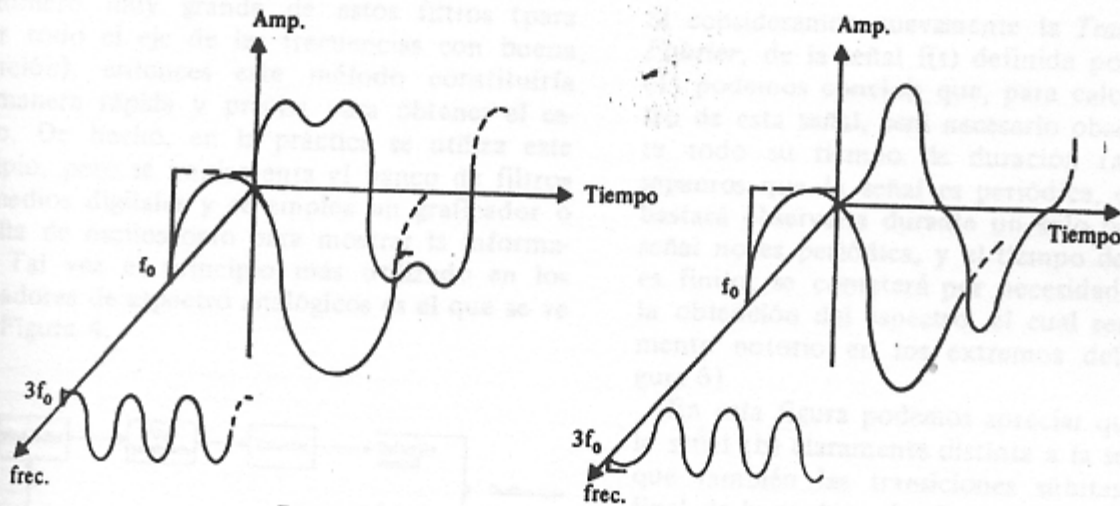


Fig. 2a. Fig. 2b.  
 Figura 2. Importancia de la relación de fase entre las componentes del espectro de una señal.

## 2. Descripción de algunos tipos de analizadores de espectro

Un analizador de espectro es un instrumento que acepta en su entrada una señal en el dominio del tiempo y despliega, registra o genera a la salida información gráfica sobre el espectro de esa señal. La implementación física es prácticamente en todos los casos electrónica, lo cual obliga al uso de transductores si la señal de entrada no es eléctrica.

Una de las maneras más sencillas de obtener el espectro de una señal consiste en presentarla a la entrada de un banco de filtros pasabanda, de ancho de banda muy estrecho y conectar la salida de cada filtro a un instrumento que despliegue la magnitud del voltaje de salida en función de la frecuencia central de la banda de paso de cada filtro (Figura 3).

Si los filtros de la Figura 3 fueran ideales (con funciones de transferencia de formas rectangulares), y si las frecuencias centrales de los filtros

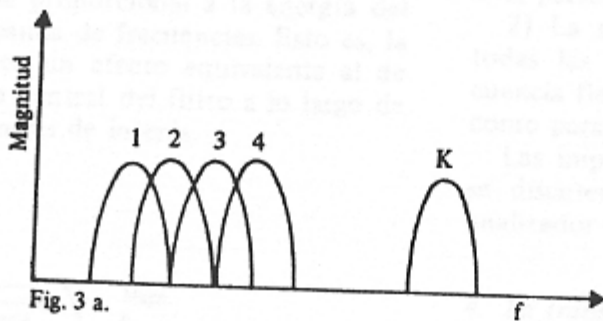


Fig. 3 a.

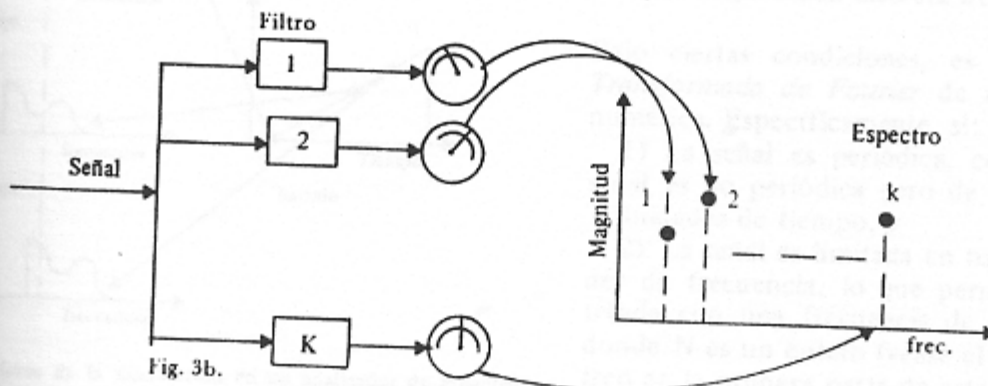


Fig. 3 b.

Figura 3. Ilustración del principio de funcionamiento de un analizador de espectro constituido por un banco de filtros pasabanda. La Figura 3a) muestra la superposición de las bandas de paso de los K filtros. La Figura 3b) ilustra cómo la salida de cada filtro constituye un punto del espectro de frecuencia de la señal de entrada.

adyacentes estuvieran separadas por exactamente el ancho de banda de los filtros y se contara con un número muy grande de estos filtros (para cubrir todo el eje de las frecuencias con buena resolución), entonces este método constituiría una manera rápida y precisa para obtener el espectro. De hecho, en la práctica se utiliza este principio, pero se implementa el banco de filtros por medios digitales y se emplea un graficador o pantalla de osciloscopio para mostrar la información. Tal vez el principio más utilizado en los analizadores de espectro analógicos es el que se ve en la Figura 4.

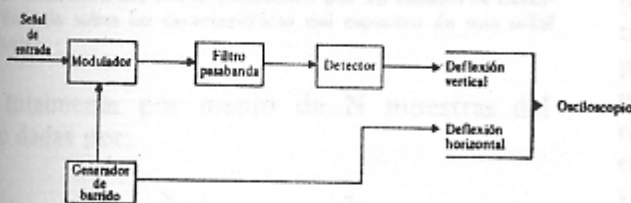


Figura 4. Principio de funcionamiento de un analizador de espectro analógico (véase texto).

En esta figura, la señal de entrada es modulada por medio de una señal senoidal de frecuencia variable, lo cual equivale a trasladar el espectro de la señal original hacia valores de frecuencia cada vez más altos. Este corrimiento en frecuencia es proporcional al voltaje instantáneo aplicado al oscilador de frecuencia variable (figura 5).

De esta manera, el filtro pasabanda "ve" cada vez distintas bandas del espectro de la señal original, y genera una salida proporcional a la energía del espectro para esa banda de frecuencias. Esto es, la modulación produce un efecto equivalente al de variar la frecuencia central del filtro a lo largo de la banda de frecuencias de interés.

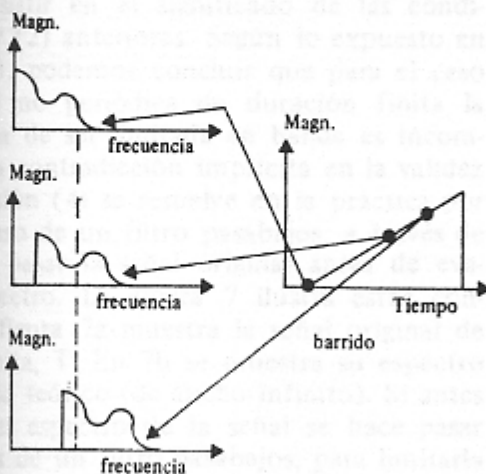


Figura 5. Efecto de la modulación en un analizador de espectro analógico (véase texto).

### 3. Limitaciones teóricas del análisis espectral

Si consideramos nuevamente la *Transformada de Fourier*, de la señal  $f(t)$  definida por la ecuación (1) podemos concluir que, para calcular el espectro de esta señal, será necesario observarla durante todo su tiempo de duración (a menos que sepamos que la señal es periódica, en cuyo caso bastará observarla durante un solo período). Si la señal no es periódica, y el tiempo de observación es finito, se cometerá por necesidad un error en la obtención del espectro, el cual será particularmente notorio en los extremos del mismo (Figura 6).

En esta figura podemos apreciar que no sólo es la señal (b) claramente distinta a la señal (a), sino que también las transiciones súbitas al inicio y final de la ventana de observación introducirán en el espectro componentes de alta frecuencia que no estaban presentes en la señal original. Es importante hacer notar que, en general, una señal limitada en el tiempo (de duración finita) posee un espectro no limitado en banda (véase también la primera parte de este artículo). En consecuencia, el analizador de espectro debería ser capaz de operar sobre un rango de frecuencia infinito, condición claramente imposible.

Las condiciones anteriores muestran la existencia de limitaciones prácticas en el análisis espectral que se traducen en las siguientes suposiciones:

- 1) La señal original posee una duración finita o es periódica.
- 2) La magnitud del espectro de la señal, para todas las frecuencias mayores a una cierta frecuencia finita dada, es lo suficientemente pequeña como para ser considerada igual a cero.

Las implicaciones de las suposiciones anteriores se discuten a continuación, para el caso de un analizador de espectro discreto.

### 4. La transformada discreta de Fourier<sup>9</sup>

Bajo ciertas condiciones, es posible evaluar la *Transformada de Fourier* de una señal en forma numérica. Específicamente, si:

- 1) La señal es periódica, con período  $T$ , o la señal es no periódica pero de duración finita, de  $T$  unidades de tiempo, y

- 2) La señal es limitada en banda a  $N/2T$  unidades de frecuencia, lo que permite que sea muestreada con una frecuencia de muestreo  $f_s = N/T$ , donde  $N$  es un entero (véase el Teorema de Muestreo en la primera parte de este artículo).

Entonces, el espectro de la señal puede descri-

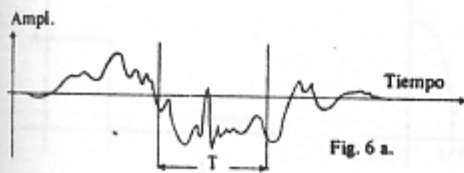


Fig. 6 a.

donde T es el período de observación:

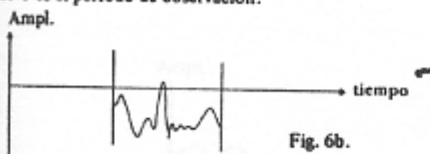


Fig. 6b.

Figura 6. Ilustración del efecto producido por un tiempo de observación limitado sobre las características del espectro de una señal (véase texto).

birse totalmente por medio de N muestras del mismo dadas por:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (4)$$

en donde  $f(n)$  son las muestras de la señal tomadas a  $T/N$  unidades de tiempo y  $N$  es el número total de muestras de la señal.

También se cumple la relación inversa. Dadas las muestras del espectro  $F(k)$ , es posible obtener la señal original por medio de la relación:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} F(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nK} \quad (5)$$

La prueba de lo anterior está dada en el Apéndice I.

Antes de analizar las diferentes formas de implementación física de las expresiones (4) y (5), conviene insistir en el significado de las condiciones (1) y (2) anteriores. Según lo expuesto en la sección 3, podemos concluir que para el caso de la señal no periódica de duración finita la característica de ser limitada en banda es incompatible. Esta contradicción implícita en la validez de la expresión (4) se resuelve en la práctica por medio del uso de un filtro pasabajos; a través de él se hace pasar la señal original antes de evaluar su espectro. La figura 7 ilustra estos conceptos. La figura 7a muestra la señal original de duración finita,  $T$ . En 7b se muestra su espectro de frecuencia teórico (de ancho infinito). Si antes de evaluar el espectro de la señal se hace pasar ésta a través de un filtro pasabajos, para limitarla en banda a la región asciurada de la Figura 7b, el resultado neto es que el espectro obtenido corresponde al de la señal mostrada en la Figura 7c. Este ejemplo corresponde a un caso extremo, pero conviene recordar que cuando se evalúa el espec-

tro de una señal por medios numéricos siempre se cometerá un error.

Volvamos a la expresión que define la transformada discreta de Fourier (ecuación 4). Conviene analizar el número de cálculos requeridos para su evaluación. Como ejemplo, supóngase que se muestrea una señal con una frecuencia de 1 KHz durante 1 segundo. Esta frecuencia de muestreo implica que la señal está limitada en banda a 500 Hz. Bajo estas condiciones, al aplicar la ecuación (4) se obtendrán 1 000 muestras del espectro separadas entre sí por 1 Hz. Las muestras del espectro entre la número 0 y la número 499 corresponden al espectro de la señal, y aquellas entre la muestra 500 y las 999 corresponden a la primera repetición periódica del espectro (recuérdese que el espectro de una señal muestreada es periódico; véase la primera parte de este artículo). Bajo estas condiciones podemos observar que el espectro de la señal queda descrito con N muestras.\* La situación anterior se ilustra en la Figura 8. La Figura 8a muestra el espectro de la señal original, mientras que la 8b describe los resultados de evaluar la expresión (4).

Según lo expuesto hasta aquí, podemos apreciar que la evaluación de cada una de las muestras del espectro requiere de una cantidad de cálculos formidable. Por ejemplo, para  $k=0$  (la componente de cero frecuencia del espectro) resulta, sustituyendo en la expresión (4)  $e^0 = 1$ :

$$F(0) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(999) \quad (6)$$

Esto es, la determinación de  $F(0)$  requiere de 999 sumas. Para evaluar  $F(1)$ , debemos sustituir  $k=1$  en la expresión (4), resultando así:

$$F(k) = f(0) + f(1)e^{-j\frac{2\pi}{1000}} + f(2)e^{-j\frac{4\pi}{1000}} + \dots + f(999)e^{-j\frac{1998\pi}{1000}} \quad (7)$$

o sea,  $F(1)$  requiere para su cálculo de 999 multiplicaciones (complejas) y 999 sumas (complejas, en general). Es fácil ver, pues, que en términos aproximados para el cálculo de las 1 000 muestras del espectro se requieren:

$$N^2 = 1\,000\,000 \text{ multiplicaciones complejas y } N(N-1) = 999\,000 \text{ sumas complejas}$$

De hecho, los cálculos anteriores no son todos,

\* En caso de que la señal sea real.

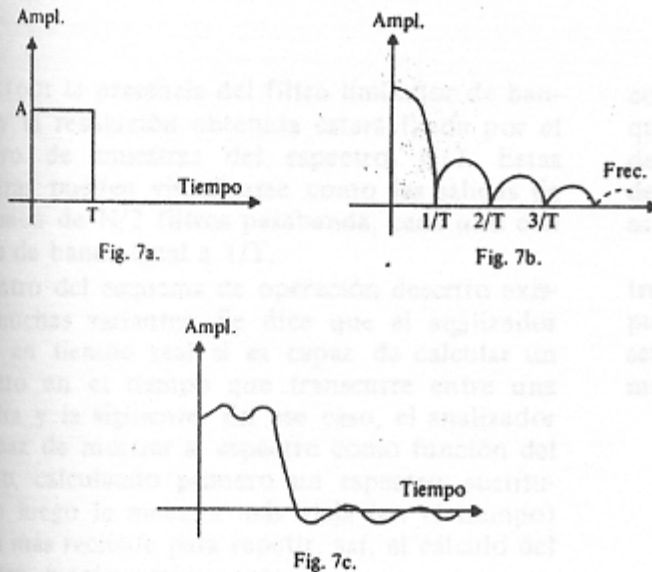


Figura 7. Ilustración del efecto del filtrado pasabajos previo al análisis espectral de una señal no-periódica (véase texto).

puesto que las  $F(k)$  así obtenidas, son números complejos, por lo que, para expresarlas en términos de magnitud y fase, son necesarios cálculos adicionales.

Por lo anterior, durante mucho tiempo se consideró que la transformada discreta de Fourier nunca habría de sobrepasar la categoría de curiosidad matemática. Esta situación cambió al aparecer la transformada rápida de Fourier (FFT). Al referirse a la FFT, se trata, de hecho, de un nombre genérico para un gran número de algoritmos, que reducen a un número razonable la cantidad de cálculos requeridos para la evaluación de la transformada discreta de Fourier. La mayoría de estos algoritmos reducen la cantidad de multiplicaciones necesarias a  $N/2 \log_2 N$  (en vez de  $N^2$ ), y la de sumas, proporcionalmente. Para nuestro ejemplo ( $N = 1000$ ), resultan aproximadamente 5000 multiplicaciones, en vez de un millón (una reducción por un factor de 200).

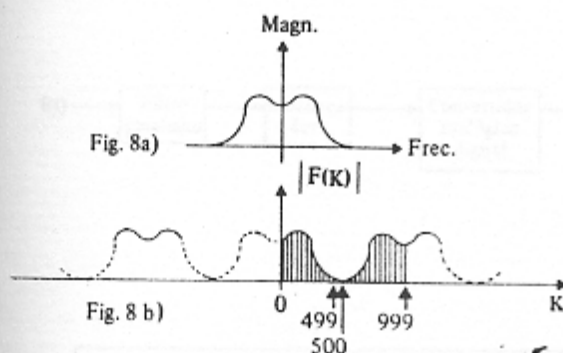


Figura 8. Evaluación del espectro de una señal muestreada por medio de la transformada discreta de Fourier. 8a) Espectro de la señal original. 8b) Espectro de la señal muestreada.

El primer trabajo en ese sentido fue publicado por el matemático alemán Runge,<sup>9</sup> pero en su tiempo, el cálculo de 5000 multiplicaciones resultaba tan abrumador como el de un millón.

Comúnmente se atribuye el primer algoritmo de FFT a los matemáticos norteamericanos Cooley y Tuckey,<sup>10</sup> quienes lo descubrieron independientemente en 1965. Se trata, en esencia, de aprovechar ciertas propiedades de simetría del término  $e^{-j(2\pi/N)nk}$ . Para efectos de ilustración, en el Apéndice II se describe uno de los algoritmos de la FFT.

### 5. El analizador de espectro discreto

A continuación, se describe el conjunto de operaciones que realiza un analizador discreto (digital) de espectro típico (véase Figura 9).

1) La señal en el dominio del tiempo es muestreada  $N$  veces, tomando una muestra cada  $\tau$  segundos, en donde  $\tau$  corresponde a la duración de la ventana de observación en el tiempo  $T$ , dividida entre el número de muestras  $N$ :

$$\tau = \frac{T}{N} \quad (8)$$

Esta frecuencia de muestreo, definida por  $\tau$ , requiere del uso de un filtro limitador de banda (véase la sección IV) con frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\tau} = \frac{N}{2T}$$

2) Un procesador digital toma las  $N$  muestras de la señal (previa conversión analógico-digital) y, con auxilio de unas tablas de los valores de

$$\text{Re}\{e^{-j(2\pi/N)nk}\} \quad \text{y} \quad \text{I}\{e^{-j(2\pi/N)nk}\}$$

calcula cada una de las muestras  $F(k)$  (parte real y parte imaginaria) del espectro, con base en la expresión (4).

3) El procesador calcula la magnitud del espectro discreto de la señal elevando  $\text{Re}\{F(k)\}$  e  $\text{I}\{F(k)\}$  al cuadrado, efectuando la suma de los valores obtenidos y posteriormente evaluando la raíz cuadrada. Los valores así obtenidos se depositan en una memoria.

4) Por medio de un convertidor digital-analógico y un filtro reconstuctor (véase la primera parte de este artículo), se despliega el espectro obtenido en la pantalla de un osciloscopio o en algún graficador.

Es conveniente hacer notar el hecho de que, bajo las condiciones anteriores, el rango de análisis del espectro estará limitado precisamente a

f. Hz (por la presencia del filtro limitador de banda), y la resolución obtenida estará fijada por el número de muestras del espectro,  $N/2$ . Estas muestras pueden visualizarse como las salidas de un banco de  $N/2$  filtros pasabanda, cada uno con ancho de banda igual a  $1/T$ .

Dentro del esquema de operación descrito existen muchas variantes. Se dice que el analizador opera en tiempo real si es capaz de calcular un espectro en el tiempo que transcurre entre una muestra y la siguiente. En ese caso, el analizador es capaz de mostrar al espectro como función del tiempo, calculando primero un espectro, sustituyendo luego la muestra más vieja (en el tiempo) por la más reciente para repetir, así, el cálculo del espectro, y así sucesivamente.

Algunos analizadores incluyen la posibilidad de promediar cierto número de espectros. Una de las características de ciertos algoritmos de FFT es la de poder calcular los espectros de dos señales reales al mismo tiempo; con esto es posible, entre otras cosas, evaluar la correlación entre espectros.

### III. Algunos usos del análisis espectral

Aparte del valor obvio de disponer del espectro de una señal, en lo que al conocimiento de sus características de contenido de frecuencias se refiere, existe una serie de tareas de procesamiento de señales más sencillas de realizar con base en el espectro que en el dominio del tiempo. Analicemos algunos ejemplos:

1) Filtrado. El espectro de una señal puede modificarse multiplicándolo por el espectro de una función específica de filtrado. La transformada discreta inversa del espectro modificado proporciona la señal filtrada (en el tiempo). Si

comparamos las expresiones (4) y (5), se observa que el mismo algoritmo utilizado para el cálculo de la transformada discreta de Fourier es capaz de generar la transformada inversa: la diferencia es un factor de escala y un cambio de signo.

2) Función de transferencia. La función de transferencia senoidal de un sistema  $H(\omega)_{AB}$ , se puede obtener con base en los espectros de las señales de entrada,  $F(\omega)_A$  y salida,  $F(\omega)_B$  por medio de la expresión:

$$H(\omega)_{AB} = \frac{F(\omega)_B}{F(\omega)_A} \quad (9)$$

3) Respuesta a impulso de un sistema. La respuesta a impulso de un sistema se puede obtener calculando la transformada inversa de la función de transferencia,  $H(\omega)_{AB}$ .

4) Función de autocorrelación. La función de autocorrelación  $R_{AA}$  de una señal  $A(t)$  se puede calcular con base en la transformada inversa del espectro de potencia media de la señal:

$$R_{AA} = F^{-1} \{ (F(\omega)_A F(\omega)_A^*)^{1/2} \} \quad (10)$$

en donde  $F(\omega)_A^*$  representa al complejo conjugado del espectro,  $F(\omega)_A$ , de la señal original.

5) Función de correlación cruzada. La función de correlación cruzada,  $R_{AB}$ , entre dos señales,  $A(t)$  y  $B(t)$ , puede calcularse en términos de los espectros de las dos señales,  $F(\omega)_A$  y  $F(\omega)_B$ , y está dada por:

$$R_{AB} = F^{-1} \{ \overline{F(\omega)_A F(\omega)_B^*} \} \quad (11)$$

esto es,  $R_{AB}$  está dada por la transformada inversa del espectro de potencia cruzada media.

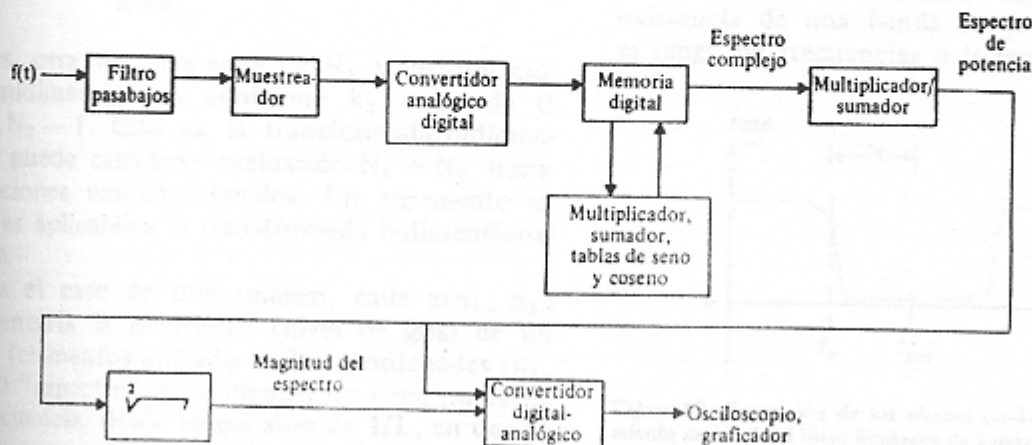


Figura 9. Operación de un analizador digital de espectro (véase texto).

6) Función de coherencia. Una medida de la relación causa-efecto entre dos señales es la llamada función de coherencia, que toma valores entre cero y uno y está definida por:

$$\gamma^2 = \frac{G_{AB} \cdot G_{AB}^*}{G_{AA} \cdot G_{BB}} \quad (12)$$

en donde  $G_{AB}$  es el espectro de potencia cruzada media definido en el punto 5, y  $G_{AA}$ ,  $G_{BB}$  son los espectros de potencia media de las señales A y B, definidos en el punto 4.

Otro campo de aplicación muy importante del análisis espectral es el procesamiento de imágenes. Para esta aplicación es necesario hacer uso de la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones, que se define como<sup>8</sup>:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N_1}\right)n_1 k_1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N_2}\right)n_2 k_2} \quad (13)$$

La expresión anterior puede describirse como sigue:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N_1}\right)n_1 k_1} \left[ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N_2}\right)n_2 k_2} \right] \quad (14)$$

El término entre paréntesis rectangulares constituye una serie de  $N$  transformaciones unidimensionales, obtenidas al variar  $n_1$  desde 0 hasta  $N_1 - 1$ . Si llamamos a cada resultado de estas transformaciones  $g(n_1, k_2)$ , entonces resulta:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N_1}\right)n_1 k_1} g(n_1, k_2) \quad (15)$$

que es, otra vez, una serie de  $N_2$  transformaciones unidimensionales conforme  $k_2$  varía de 0 hasta  $N_2 - 1$ . Esto es, la transformada bidimensional puede calcularse evaluando  $N_1 + N_2$  transformaciones unidimensionales. Un argumento similar es aplicable a la transformada bidimensional inversa.

Para el caso de una imagen, cada  $x(n_1, n_2)$  representaría la intensidad (nivel de gris) de un punto (elemento) ubicado en las coordenadas  $(n_1, n_2)$ . El "espectro" de la imagen no tiene unidades de frecuencia, desde luego, sino de  $1/L$ , en donde

$L$  es la unidad de longitud. Al espectro bidimensional de una imagen es aplicable el equivalente de la operación de filtrado para señales unidimensionales. El filtrado de imágenes se utiliza, entre otras aplicaciones, para reducir los efectos del ruido introducidos en la transmisión de imágenes a grandes distancias. Otras aplicaciones del espectro bidimensional involucran operaciones de deconvolución (restauración de imágenes movidas, desenfocadas, etcétera) y procesamiento no-lineal (realce de contraste, por ejemplo).

#### IV. Problemas prácticos del procesamiento discreto

No es posible en el marco de este artículo discutir cuantitativamente todas las fuentes de error en el procesamiento discreto. Más aún, muchos problemas se encuentran en la frontera del conocimiento y son objeto de estudio de numerosos grupos de especialistas. Se mencionarán a continuación las fuentes de errores más obvias a las que se enfrenta el que aplica las técnicas del procesamiento discreto. (Una discusión más detallada se encuentra en las referencias 3, 4, 5 y 7.)

##### 1. Filtros limitadores de banda

Como se analizó en la segunda parte de este artículo, se requiere de un filtro limitador de banda (pasabajos) en todos aquellos casos en los que la señal no es inherentemente limitada en banda. En las aplicaciones de filtrado discreto es posible proporcionar bandas de protección entre la frecuencia de corte del filtro pasabajos y la frecuencia correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo, con el objeto de reducir los efectos de la atenuación no-infinita del filtro pasabajos (*aliasing*: superposición de espectros adyacentes) a niveles tolerables. Sin embargo, esto no es posible en el análisis espectral, ya que la existencia de una banda de protección reduciría el rango de frecuencias o la resolución del instru-

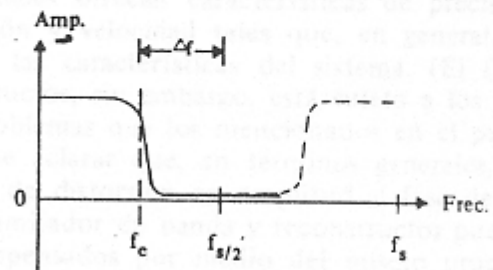


Figura 10. Ilustración de los efectos producidos por el comportamiento no ideal del filtro limitador de banda (véase texto).



mento. Este efecto se muestra en la figura 10, en donde se puede apreciar que de proporcionarse una banda protección de ancho  $\Delta f = f_s/2 - f_c$ , ésta limitaría el rango del analizador a un valor de  $2f_c/f_s$  veces el límite teórico del instrumento.

En consecuencia, la desviación de las características de un filtro pasabajos físicamente realizable de las del filtro pasabajos ideal, tanto en respuesta a la frecuencia como en fase, es una fuente importante de error.

## 2. Muestreo y conversión analógico-digital

El circuito muestreador-retenedor en su forma más sencilla puede visualizarse como se muestra en la Figura 11. En el circuito de la figura, el switch S cierra periódicamente (a intervalos T seg) durante  $\tau_s$  segundos y carga un condensador C, vía una resistencia R que incluye la resistencia del interruptor, así como resistencias de alambra-

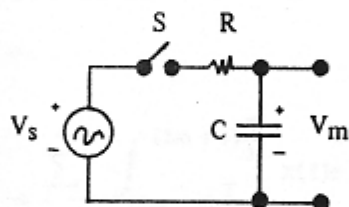


Figura 11. Circuito muestreador retenedor ideal (véase texto).

El condensador C retiene su carga y, con ello, el valor de la muestra, hasta el siguiente intervalo de muestreo, permitiendo así que un convertidor analógico-digital efectúe la conversión durante el intervalo entre muestras.

Una expresión aproximada de la magnitud de la función de transferencia del circuito muestreador-retenedor toma la forma<sup>2</sup>

$$|G(\omega)| = \left[ \frac{1 + e^{-\tau_s/\tau_a} \cos(\omega T - 1)}{1 + \omega^2 \tau_a^2} \right]^{1/2} \quad (16)$$

en donde  $\tau_a = RC$  es la constante de tiempo del circuito. De lo anterior se desprende que el muestreador-retenedor introduce un efecto de filtrado, tipo pasabajos, cuya importancia depende fundamentalmente del valor de  $\tau_a$ .

Los convertidores analógico-digitales modernos pueden considerarse prácticamente ideales en lo que se refiere a linealidad, monotonicidad y precisión. La limitación fundamental de estos dispositivos radica en el hecho de poseer una resolución finita ( $2^{-N}$  donde N es el número de bits

del convertidor). Esta resolución impone una restricción no superable al procesamiento discreto, al generar muestras discretas ya no sólo en el tiempo, sino también en la amplitud; esto es, al generar señales digitales. Así, un convertidor de 12 bits limita al procesador a una resolución (en amplitud) de 1 parte en 4096, y a un rango dinámico de 72.25 db.

## 3. El procesador digital<sup>2, 11</sup>

El procesador digital contribuye al error total del sistema de análisis espectral por toda una serie de circunstancias, entre las cuales destacan las siguientes:

a) Precisión finita en la representación de constantes.

b) Errores por redondeo y/o truncamiento a un número finito de bits de los resultados parciales.

c) Acumulación de errores (mencionados en b) en algoritmos recursivos y/o algoritmos que involucran la evaluación de sumatorias. Todos los algoritmos mencionados aquí son de este tipo.

d) Problemas de estabilidad de algoritmos recursivos.

Cada algoritmo de cálculo presenta problemas individuales y es difícil establecer lineamientos o cotas al error, de validez general. (Una exposición excelente de este tema se encuentra en la referencia 8.) En principio, esta clase de problemas se ataca por medio de una herramienta probabilística. El factor costo y la velocidad de ejecución condicionan los compromisos que el diseñador habrá de establecer en una aplicación dada.

## 4. Convertidor digital-analógico y filtro reconstructor

En los sistemas modernos, el convertidor digital-analógico rara vez contribuye de manera apreciable al error global de los mismos. Los convertidores actuales ofrecen características de precisión, resolución y velocidad tales que, en general, no afectan las características del sistema. (El filtro reconstructor, sin embargo, está sujeto a los mismos problemas que los mencionados en el punto 1). Cabe aclarar que, en términos generales, los efectos de distorsión en amplitud y fase de los filtros limitador de banda y reconstructor pueden ser compensados por medio del mismo procesamiento digital. Lo que en última instancia constituye el límite insuperable son las pendientes de corte finitas y la atenuación finita en la región de atenuación de un filtro dado.

APENDICE I

De la Transformada Continua de Fourier a la Transformada Discreta de Fourier

Considérese el problema de evaluar numéricamente la integral:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (I.1)$$

Atacaremos este problema en dos pasos: 1) Convertir la integral infinita en otra finita, y 2) Sustituir la integral finita por una suma. Para lograr el primer objetivo, nos limitaremos a evaluar muestras del espectro (I.1), para valores de  $\omega = n\omega_0$ , donde  $\omega_0 = 2\pi/T$

$$X(n\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (I.2)$$

La expresión (I.2) puede escribirse como una suma infinita de integrales, cada una evaluada sobre un periodo T:

$$X(n\omega_0) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\frac{T}{2}}^{(2m+1)\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (I.3)$$

Se hace el cambio de variable  $t \rightarrow t - mT$  y resulta así:

$$X(n\omega_0) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - mT)e^{-jn\omega_0(t - mT)} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - mT)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (I.4) \end{aligned}$$

$$\text{ya que } e^{jn\omega_0 mT} = e^{jnm2\pi} = 1 \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$$

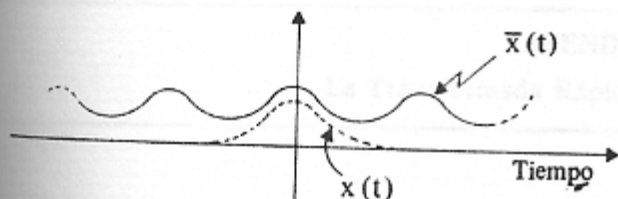


Figura I.1 Señal periódica  $\bar{x}(t)$  obtenida a partir de la señal no periódica  $x(t)$  para efectos de la transformada discreta de Fourier (véase texto).

Finalmente, se intercambia el orden de la sumatoria e integral en (I.4) y resulta:

$$\begin{aligned} X(n\omega_0) &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT) \right] e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \bar{x}(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (I.5) \end{aligned}$$

en donde

$$\bar{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT)$$

es una señal periódica en T obtenida a partir de  $x(t)$  (figura I.1).

La expresión (I.5) establece que la integral (I.1) puede reducirse a una integral finita sustituyendo  $x(t)$  por una señal periódica  $\bar{x}(t)$ , que puede determinarse exactamente si se conoce  $x(t)$  para toda t.

Para lograr el segundo objetivo se hará uso del hecho de que  $\bar{x}(t)$  es periódica y que, por lo tanto, puede ser expresada como una serie de Fourier:

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ donde}$$

$$K_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{x}(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (I.6)$$

Al comparar la ecuación (I.6) con la ecuación (I.5) se observa que  $K_n = \frac{1}{T} X(n\omega_0)$  y, por lo tanto:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \quad (I.7)$$

Para poder resolver la ecuación (I.7) para  $X(n\omega_0)$ , es necesario reducir la sumatoria infinita a otra finita.

Sea  $\tau = T/N$  y  $\bar{x}(m\tau)$  muestras de  $\bar{x}(t)$  tomadas cada  $\tau$  segundos, entonces:

$$\bar{x}(m\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)e^{jnm\omega_0 \tau} \quad (I.8)$$

Haciendo uso de la notación  $e^{j\frac{2\pi}{N}} = W_N$ , entonces:

$$e^{jnm\omega_0 r} = e^{jnm\frac{2\pi}{T} r} = e^{jnm\frac{2\pi}{T} \frac{T}{N}} = W_N^{nm} \quad (I.9)$$

En estos términos podemos escribir la ecuación (I.8) como:

$$\bar{x}(m\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) W_N^{nm} \quad (I.10)$$

Sea ahora  $n = K + rN$ ,  $K = 0, 1, \dots, N-1$  y  $r = \dots, -1, 0, 1, \dots$  entonces:

$$W_N^{nm} = W_N^{(K+rN)m} = W_N^{Km} W_N^{rmN}$$

$$\text{Pero, } W_N^{rmN} = e^{j\frac{2\pi}{N} rmN} = 1$$

$$(n, m, K, N - \text{enteros}) \quad (I.11)$$

De esta manera, la ecuación (I.10) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \bar{x}(m\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{K=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X[(K+rN)\omega_0] W_N^{Km} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{K=0}^{N-1} \bar{X}(K\omega_0) W_N^{Km} \quad (I.12) \end{aligned}$$

en donde  $\bar{X}(K\omega_0) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X[(K+rN)\omega_0]$  es

una secuencia periódica de período  $N$  definida para toda  $K$ .

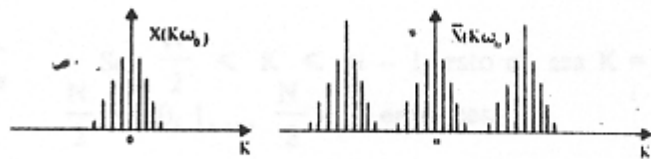


Figura 1.2 Relación entre los espectros muestreados  $X(K\omega_0)$  y  $\bar{X}(K\omega_0)$  (véase texto).

En función de lo anterior,  $\bar{X}(K\omega_0)$  puede obtenerse de las muestras  $\bar{x}(m\tau)$  de  $\bar{x}(t)$  resolviendo un sistema de  $N$  ecuaciones simultáneas. Nótese que, en general,  $X(K\omega_0)$  no es igual a  $\bar{X}(K\omega_0)$ . También, en general,  $X(K\omega_0)$  no puede obtenerse de  $\bar{X}(K\omega_0)$  a menos que, a lo más,  $N$  valores de  $X(K\omega_0)$  sean distintos a cero. Esto es  $X(K\omega_0)$  puede obtenerse de  $\bar{X}(K\omega_0)$  si  $X(\omega)$  está limitado en banda a  $\pi/T$  radianes/seg (Figura 1.2).

Resumiendo, si  $X(\omega)$  está limitada en banda a  $\pi/T$  radianes/seg, entonces se podrán obtener  $N$  muestras  $X(K\omega_0)$  del espectro  $X(\omega)$  a partir de otras tantas muestras de la señal periódica  $\bar{x}(t)$ . El Teorema de muestreo (en frecuencia) garantiza entonces que las muestras  $X(K\omega_0)$  contienen toda la información espectral. En estas condiciones, sin embargo,  $x(t)$  no está limitado en el tiempo, por lo que se cometerá un error (*aliasing*) en el tiempo si no se calcula  $\bar{x}(t)$  a partir de  $x(t)$ . Si  $X(\omega)$  no está limitado en banda,  $x(t)$  puede ser igual a  $\bar{x}(t)$ , pero entonces se cometerá un error (*aliasing*) en la frecuencia.

La relación (I.12) define la transformada discreta de Fourier inversa. Las muestras  $\bar{X}(K\omega_0)$  del espectro pueden obtenerse de (I.12), con lo cual resulta:

$$\begin{aligned} \bar{X}(K\omega_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n\tau) W_N^{-Kn} \\ &K = 0, 1, \dots, N-1 \quad (I.13) \end{aligned}$$

La prueba se encuentra en la referencia 8.

## APENDICE II

### La Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Considérense las expresiones:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad K = 0, 1, \dots, N-1 \quad (II.1)$$

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (II.2)$$

que constituyen la pareja de transformadas discretas de Fourier en su notación más usual, en donde  $W_N = e^{-j2\pi/N}$  y  $N$  es un entero.

Supóngase que  $N = 2^L$  ( $L$  un entero), entonces  $X_K$  puede representarse como la suma de dos secuencias:

$$X_K = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ par}}}^{N-1} x(n)W_N^{nK} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impar}}}^{N-1} x(n)W_N^{nK} \quad (\text{II. 3})$$

Sea  $n = 2r$  para  $n$  par y  $n = 2r + 1$  para  $n$  impar ( $r$  entero), entonces:

$$\begin{aligned} X_K &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rK} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)K} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) (W_N^2)^{rK} + W_N^K \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) (W_N^2)^{rK} \end{aligned}$$

Pero

$$W_N^2 = e^{(j\frac{2\pi}{N})^2} = e^{j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

y

$$\begin{aligned} X_K &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{rK} + W_N^K \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rK} \\ &= G(K) + W_N^K H(K) \quad (\text{II.4}) \end{aligned}$$

donde  $G(K)$  es la transformada discreta de las muestras pares  $x(2r)$ , y  $H(K)$  corresponde a la transformada de las impares  $x(2r+1)$ .

Como  $G(K)$  y  $H(K)$  se evalúan con base en  $N/2$  términos, tanto  $G(K)$  como  $H(K)$  requieren de aproximadamente  $N^2/4$  multiplicaciones. Así, el total de multiplicaciones requerido resulta ser de  $2N^2/4$  para la evaluación de  $G(K)$  y  $H(K)$  más  $N/2$  para la evaluación de  $W_N^K H(K)$ , así tenemos para valores  $N$  grandes:

$$\frac{2N^2}{4} + \frac{N}{2} = \frac{N}{2} (N+1) \approx \frac{N^2}{2} \text{ para } N \gg 1 \quad (\text{II. 5})$$

Esto es, el número de multiplicaciones se reduce aproximadamente a la mitad.

NOTA:  $X(K)$  es periódica con período  $2\pi$  y posee  $N$  términos por período.  $G(K)$  y  $H(K)$  poseen

el mismo período, pero generan solamente  $N/2$  valores distintos.

Sea  $\frac{N}{2} \leq K \leq N-1$ , esto es, sea  $K = m + \frac{N}{2}$ ,  $m=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$ , entonces,

$$W_N^K = W_N^{m+\frac{N}{2}} =$$

$$\left( e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{m+\frac{N}{2}} = W_N^m e^{-j\pi} = -W_N^m$$

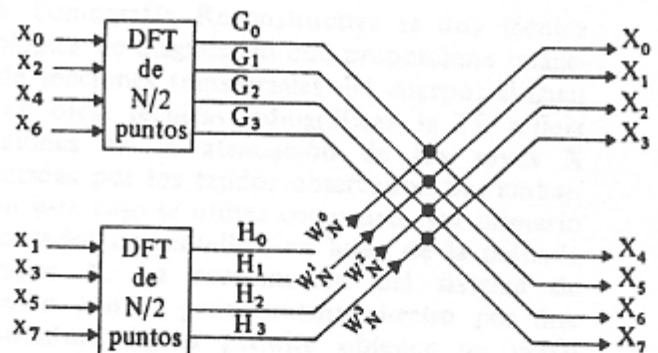
Por lo tanto

$$X(K) =$$

$$G(K) + W_N^K H(K), \quad K = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$G(K) - W_N^K H(K), \quad K = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \quad (\text{II.6})$$

Gráficamente resulta lo siguiente (Figura II.1), para el caso de 8 muestras de la señal:



donde se utilizó la convención de la llamada "mariposa":

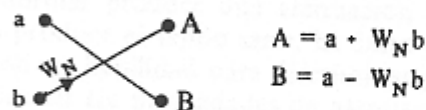


Figura II.1 Ilustración del cálculo de la transformada discreta de Fourier con base en la FFT (véase texto).

Dado que  $N$  se supone igual a  $2^L$  entonces  $\frac{N}{2} = 2^{L-1}$  y tanto  $G$  como  $H$  poseen un número par de términos, entonces se puede repetir el proceso, expresando a  $G$  y a  $H$  como la suma de dos secuencias de  $N/4$  términos cada una. Si se sigue este pro-